
Dott. VELLO ZANOLLI

Assistente alla cattedra di Antropologia della R. Università di Padova

NOTA SULLA TEORIA DELLA VARIABILITÀ e della correlazione



Ho voluto riassumere nelle seguenti pagine, in forma semplice, accessibile all'intelligenza di qualunque studioso abbia per poco la abitudine di approfondire sufficientemente un argomento e non nutra soprattutto infondato odio pel regno dei simboli, quel poco di teoria oggidì indispensabile per rendersi adeguata cognizione dei nuovi concetti e degli interessanti fatti che l'attuale scuola biometrica inglese ci ha rivelati.

La lieve fatica che l'interpretazione delle due teorie, qui succintamente, ma, se non mi lusingo, molto chiaramente svolte richiede, rimane largamente compensata nella visione di un largo e sereno orizzonte che dinanzi noi si schiude, in fondo a cui le cose acquistano ben altra luce e, ciò che più interessa, più nitidi contorni.

Il presente lavoro costituisce pertanto un semplice tentativo di popolarizzare, per quanto lo comporti l'argomento, quelle teorie che due anni fa il Ranke ha mirato di diffondere in *Archiv für Anthropologie* tra gli studiosi della sua terra.

Io però, come si vedrà, non lo scelsi a modello, ma attinsi a preferenza alle fonti originali, fondendo, per quanto mi fu dato, le diverse tendenze in un quadro complessivo, ciò che conferisce forse l'unica impronta personale della presente nota, e, fedele al mio intento, eliminai il non strettamente necessario, le dimostrazioni di ordine secondario, nonchè tutto ciò che richiedesse profonda e solida cultura matematica. Così limitato, lo ripeto, l'accorto lettore di queste pagine, non andrà ad inciampare contro verun ostacolo insor-

montabile ⁽¹⁾ e sarà posto in grado di rendersi, se non esatta, certo sufficiente ragione delle più correnti memorie di biometria, rendendosi eventualmente utile, nell'elaborare il negletto materiale bruto di cui troppo, forse, sovrabbonda la nostra produzione antropologica.

Variabilità.

Supponiamo di aver fatto sopra un grande numero di individui d'una unità formale organica, una serie di numerose osservazioni sopra una determinata caratteristica, che naturalmente deve, in generale, variare da individuo ad individuo.

Portiamo come esempio abbastanza chiaro, i risultati ottenuti da Amann ⁽²⁾ sulla misura della variazione di lunghezza del pedicello in 522 esemplari del *Bryum cirratum* Br. Eur. proveniente dalla morena del ghiacciaio di Otemma, nel Vallese, raccolti nello stesso tempo.

Misure in millimetri																										
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27							
Numero degli individui																										
1	0	2	1	3	2	9	38	67	91	107	89	56	34	16	1	2	1	1	1							
Percentuale																										
0,1	0,1	0,3	0,2	0,5	0,3	4,4	6,9	11,8	17,2	20,5	17,2	11,8	6,9	2,4	0,3	0,5	0,2	0,3	0,4							

Se ora sviluppiamo il binomio Newtoniano $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^{14}$ e riduciamo al $\%$ i coefficienti, troviamo per questi così ridotti i valori:

0; 0; 0; 0,1; 0,6; 2,2; 6,1; 12,2; 18,3; 21; 18,3; 12,2; 6,1; 2,2; 0,6; 0,1; 0; 0; 0;

che sono approssimativamente uguali alle percentuali date dall'espe-

(1) Ben inteso, io mi rivolgo al naturalista che ha superato l'esame del corso speciale di matematiche del primo biennio d'Università; il quale, almeno a Padova, è ormai giustamente reso obbligatorio. Il Dubois Reymond, in uno dei suoi più felici discorsi tenuti all'Università di Berlino, sulla riforma degli studi secondari in Germania, dimostrava quarant'anni or sono la necessità che lo studente liceale imparasse ad interpretare la curva di variabilità di un fenomeno naturale. Non so se le proposte di quel grande trovarono fortuna. Da noi, per esempio, so che lo stesso studente della sezione fisico-matematica dell'Istituto tecnico consegue la sua brava licenza ignorando ancora l'equazione della retta!

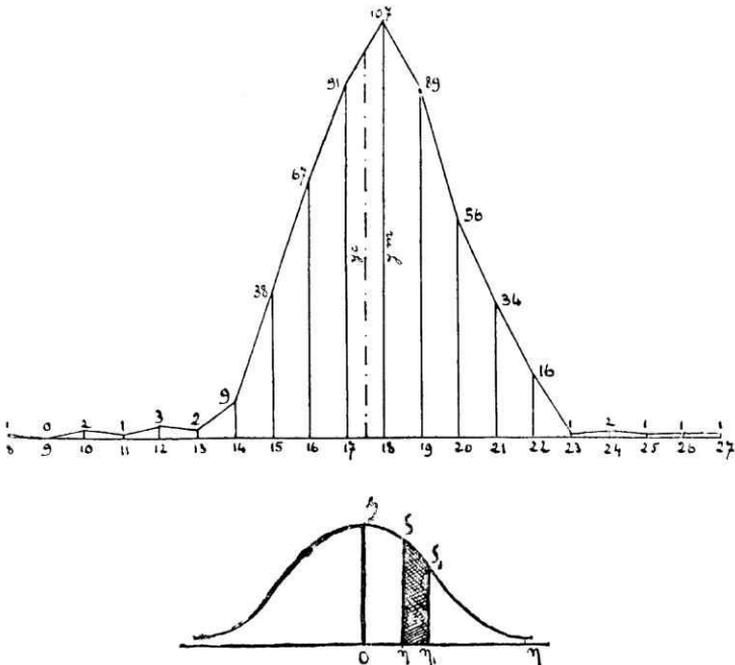
(2) *Application de la loi des grandes nombres à l'étude d'un type végétal.* Extrait du *Journal de Botanique*, fasc. XIII, 6, 7 et 8, anno 1899.

rienza. E ciò è vero, malgrado il numero non troppo grande di casi contemplati; a più forte ragione sarà vero quanto maggiore è il numero di casi.

Questo andamento delle frequenze delle diverse misure, noi lo possiamo graficamente rappresentare, col cosiddetto *poligono empirico di variazione*.

Portiamo cioè come ascisse a una scala qualunque le misure osservate e come ordinate corrispondenti a una scala pure qualunque, delle lunghezze proporzionali ai numeri d'individui corrispondenti alle singole misure, riunendo con tratti rettilinei gli estremi delle ordinate.

Per poter confrontare più poligoni fra loro, corrispondenti a diverse serie di osservazioni, è legittimo ridurre sempre quei numeri al per 100 o al per 1000, cosicchè i diversi poligoni racchiudono coll'asse delle ascisse, aree uguali.



Diamo alcune definizioni:

Dicesi *variante* un qualsiasi individuo di una determinata unità formale sul quale si sia misurata la grandezza di una certa caratteristica.

L'insieme delle varianti che offrono la stessa grandezza sulla caratteristica, costituisce una *classe*.

Grandezza della classe, dicesi il valore espresso in una certa unità della grandezza comune della caratteristica nella data classe. (*Magnitude* degli inglesi).

Frequenza della classe (f) dicesi il numero di volte che si presenta la stessa grandezza.

Nel nostro esempio 107 è la f per $V = 18$: 9 è la f per $V = 14$, e così via.

La somma delle frequenze deve quindi dare il numero totale n degli individui osservati. Nel nostro caso 522.

$$\Sigma (f) = n.$$

Media aritmetica d'una caratteristica, dicesi la somma delle singole varianti divisa per il numero degli individui e denotasi con M . Si ha:

$$M = \frac{\Sigma (V)}{n}.$$

Dicesi *deviazione* o meglio: *deviazione dalla media*, la grandezza variabile $x = V - M$.

L'ordinata del poligono di variazione corrispondente alla ascissa M , dicesi *ordinata baricentrica*.

L'*ordinata massima* o *moda* è quella corrispondente al numero massimo di frequenze osservate; nel nostro caso è quella eretta sulla ascissa 18.

Nel maggior numero dei casi, il poligono di variazione è unimodale, più raramente plurimodale, oppure smussato.

Per n individui osservati, esso contiene sempre n unità di aree, ognuna formata di un rettangolo che ha per lati l'unità di variante (u) e l'unità di individuo (i).

Per la rappresentazione di u e i , si adottano rispettivamente eguali segmenti (10 mm. per u e 2 mm. per i) dopo aver ridotto al per cento il numero totale degli individui.

Le aree dei diversi poligoni, per serie di osservazioni su individui ridotti in numero alla stessa percentuale, sono tutte uguali

$$n \times u \times i = 100 \times 10 \times 2 \text{ mm.}^2 = 20 \text{ cm.}^2$$

Se sommiamo tutti i quadrati x^2 delle deviazioni dalla media aritmetica di tutte le varianti di un poligono empirico di variazione, dividiamo la somma $\Sigma (x^2)$ per il numero totale n delle osservazioni ed estraiamo la radice quadrata, otteniamo la formola:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma (x^2)}{n}}$$

che ci dà il cosiddetto *indice di variabilità* del poligono, o come traduce l'Helguero, la *deviazione normale*.

I fondatori dei metodi statistici di ricerche dei fenomeni di variazione, Quételet ⁽¹⁾ e Galton ⁽²⁾, scopersero la seguente legge generale per i poligoni di variazione:

« I vertici di un poligono unimodale di variazione, giacciono
« sopra una equivalente curva di errore di Gauss, avente la stessa
« deviazione normale del poligono e avente altresì la moda (di sim-
« metria) coincidente coll'ordinata baricentrica del poligono e la
« cui lunghezza è una funzione del contenuto areale e della devia-
« zione normale del poligono ».

In altri termini abbiamo che dal medio valore aritmetico M della caratteristica, vengono ripartiti due gruppi di egual numero di cause elementari equipollenti sconosciute, che hanno efficienza nel costituire le deviazioni positive e negative da detto valore medio. Ogni singola deviazione, corrisponde a una determinata combinazione di queste cause e la sua frequenza alla probabilità delle medesime per tutte le possibili combinazioni.

La curva ha quindi per espressione generale lo sviluppo del binomio $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^m$, in cui m sia un numero molto grande ed ha forma simmetrica.

Più tardi il matematico inglese Pearson, dopo che l'esperienza dimostrò l'esistenza anche di altri poligoni di variazione, i cui vertici non giacciono su curve simmetriche della natura della curva di Gauss, diede alla luce una sua geniale teoria delle *curve generalizzate di probabilità*, che corrispondono allo sviluppo del binomio generale:

(¹) *Lettres à Son Altesse Royale le Duc de Saxe Cobourg et Gotha: Sur la théorie des probabilités appliquée aux sciences morales et politiques*, Bruxelles, 1846.

(²) *The geometric mean in vital and social statistics*. Proc. Roy. Soc. London, vol. 29, n. 198, pag. 365-367, anno 1879.

$$\left(\frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} \right)^m$$

Le ordinate di una tale curva, non sono altro che lunghezze proporzionali ai coefficienti dello sviluppo del precedente binomio.

La curva ed il poligono, hanno sempre il carattere unimodale, ma perdono in generale il carattere della simmetria, per cui la moda Y_m non coincide, in generale, coll'ordinata baricentrica Y_c .

La curva di probabilità generalizzata dal Pearson ⁽¹⁾ può, corrispondentemente al binomio:

$$\left(\frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} \right)^m,$$

possedere forma simmetrica od asimmetrica ed inoltre, considerata a partire dal valore medio M , può avere estensione illimitata nei due sensi dell'asse delle ascisse, oppure avere estensione limitata in un senso solo, ovvero limitata in tutti e due i sensi.

Se poi teniamo conto anche delle curve e dei poligoni a più mode, noi possiamo distribuire tutte le curve in sette tipi diversi, conforme la seguente classificazione.

In base alla teoria generale del Pearson, possiamo enunciare in quest'altro modo il principio fondamentale relativo alla variazione spontanea:

Il poligono di variazione ha in generale i suoi vertici o sopra una curva normale o sopra una curva generalizzata, i cui parametri possono calcolarsi per mezzo della seriazione empirica. In altri termini:

La frequenza delle singole varianti, soggiace alle leggi della probabilità delle combinazioni.

I sette tipi di curve si classificano, secondo Ludwig ⁽²⁾, nel modo seguente:

1° Curve monomorfe:

a) bilaterali (a due rami).

⁽¹⁾ *Contributions to the mathematical theory of evolution. II. Skew variation in homogeneous material.* Philos. Transact. Roy. Soc. London, vol. 186 A, n. 153, pag. 343-414, 1895.

— Abstr. Proc. Roy. Soc. London, vol. 57, n. 343, pag. 257-260, 1895.

⁽²⁾ *Variationskurven.* Gad's Reallexicon d. med. Propädeut. Bd. III, 1898.

α) Simmetriche.

Tipo I. Curve binomiali normali (curve normali o degli errori di Gauss). Equazione:

$$y = y_0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Tipo II. Curve iperbinomiali ad ascisse limitate. Equazione:

$$y = y_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^m$$

β) Asimmetriche.

Tipo III. Curve parabinomiali ad ascisse limitate. Equazione:

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x}{a_1}\right)^{m_1} \left(1 - \frac{x}{a_2}\right)^{m_2}$$

Tipo IV. Curve parabinomiali ad ascisse illimitate. Equazione:

$$y = y_0 \left(\cos \vartheta\right)^{2m - v\vartheta} e^{-v\vartheta}, \text{ dove } \operatorname{tg} \vartheta = \frac{x}{a}$$

b) unilaterali (a un solo ramo).

Tipo V. Curve galtoniane $\left\{ \begin{array}{l} \text{binomiali.} \\ \text{iperbinomiali.} \end{array} \right.$ Equazione:

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x}{a}\right)^p e^{-\frac{x}{a}}$$

In queste equazioni le lettere hanno i seguenti significati:

x è l'ascissa a partire dal punto M medio aritmetico delle varianti V , cioè è $x = V - M$;

y_0 è l'ordinata di partenza, la cui lunghezza si ottiene mediante un calcolo speciale; essa è sempre una funzione del quoziente del contenuto areale della curva ($n u i$) e dell'indice di variabilità σ , e viene espressa come tutte le ordinate, mediante l'unità individuale i ;

y è la lunghezza della ordinata, la cui distanza da y_0 corrisponde ad una ascissa x , espressa nell'unità di variante u ;

a è una determinata ascissa espressa in unità di variante e che si deduce col calcolo;

e è la base del sistema di logaritmi naturali = 2,71828, che

si deduce dallo sviluppo del binomio $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ dove n sia un numero finito molto grande.

c) plurimodali.

Tipo VI. Curve costanti.

2° Curve polimorfiche.

Tipo VII. Curve combinate o di sommazione,

I. *La curva binomiale normale* è quella che noi abbiamo studiato portandola come esempio tipico, come accordantesi coi risultati dell'osservazione sul *Bryum cirratum*.

II. *La curva iperbinomiale ad ascisse limitate* è una binomiale di cui la moda si trova rialzata per il fatto che nell'insieme degli individui osservati, ne esiste un certo numero di quelli che non variano. Ludwig dimostrò che il numero delle invarianti e delle varianti, può essere determinato esattamente in base allo studio dell'andamento della curva ottenuta.

III. e IV. *Nelle curve parabinomiali*, la moda corrispondente al valore medio M della caratteristica, non si trova simmetricamente nel mezzo della curva, ma è spostata a destra o a sinistra della posizione che sarebbe assegnata dalla formula binomiale. La frequenza delle deviazioni x , diminuisce più rapidamente da un lato che dall'altro.

V. *La curva galloniana*, rappresenta una variazione unilaterale, poichè uno dei valori estremi della caratteristica variante è nello stesso tempo il valore normale presentato dal più grande numero di individui. Queste curve possono del resto essere binomiali o iperbinomiali.

VI. *Curve monomorfe costanti plurimodali* di cui la posizione e la lunghezza della moda, sono costanti nei differenti luoghi. Queste curve corrispondono ad una *variazione monotipica*.

VII. *Curve combinate plurimodali* con di solito una moda principale ed altre mode secondarie più o meno numerose. La lunghezza di tali mode è variabile nei differenti luoghi, mentre la loro posizione relativa è costante. La distanza delle mode secondarie dalla principale, corrisponde di solito ai termini della serie 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, (Numeri di Fibonacci) o ai loro multipli di 2 o 3. Queste curve sono l'indice della coesistenza di più tipi fra gli individui osservati (*variazione politipica*).

Di questi ultimi due tipi di curve, non diamo le equazioni, perchè lo studio di esse non è stato sufficientemente sviluppato.

Occupiamoci ora in modo speciale delle curve monomorfe.

Pearson ha dato un processo semplice per classificarle, in base al comportamento reciproco di certe costanti, dette *costanti generali delle curve monomorfe*.

Il metodo per il calcolo di queste costanti è il seguente:

Si determina la media aritmetica M della caratteristica, si pone uguale a zero una qualunque variante V , meglio ancora, e ciò evidentemente per evitare numeri alti, si pone uguale a zero, la variante media V_m , che è quella che le sta più vicino, e si indichi la differenza delle altre da essa, cioè $V - V_m$ corrispondentemente ai suoi valori in unità di variante, con $-1, -2, \dots, 1, 2, \dots$, si moltiplica la frequenza f di ogni singola variante per la prima, seconda, terza e quarta potenza della corrispondente differenza, si sommano i prodotti di ugual potenza e si divide ognuna delle quattro somme per il numero totale n degli individui osservati.

Si ottengono in tal modo quattro numeri $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$, di cui ν_1 ed ν_3 , possono essere negativi, e ν_1 è una frazione propria coi valori limiti 0 e $\pm 0,5$, cioè è uguale alla differenza fra la media aritmetica e la variante media $M - V_m$.

$$\nu_1 = \frac{\sum (V - V_m)}{n} = M - V_m; \quad \nu_3 = \frac{\sum (V - V_m)^3}{n}$$

$$\nu_2 = \frac{\sum (V - V_m)^2}{n}; \quad \nu_4 = \frac{\sum (V - V_m)^4}{n}$$

Allora, secondo Pearson, i quattro primi *momenti di curva*, intorno al punto medio, sulle ascisse del poligono di variazione, somma dei trapezi che la compongono (cioè le medie aritmetiche delle prime quattro potenze delle deviazioni sulle ascisse da quel punto) saranno rispettivamente:

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 \left(+ \frac{1}{6} \right)$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3 \nu_1 \nu_2 + 2 \nu_1^3$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4 \nu_1 \nu_3 + 6 \nu_1^2 \nu_2 - 3 \nu_1^4 \left(+ \nu_2 - \nu_1^2 + \frac{1}{15} \right)$$

Il secondo ed il quarto momento sono quindi modificati ed ingranditi rispetto al loro vero valore della quantità addizionale fra le parentesi.

I veri valori dei momenti, ponendo, come sempre abbiamo fatto, $V - M = x$ sono:

$$\frac{\Sigma (x)}{n} = 0 = \mu_1$$

$$\frac{\Sigma (x^2)}{n} = \nu_2 - \nu_1^2 = \mu_2 - \frac{1}{6} = \sigma^2$$

$$\frac{\Sigma (x^3)}{n} = \mu_3$$

$$\frac{\Sigma (x^4)}{n} = \mu_4 - \sigma^2 - \frac{1}{15}$$

I valori così ottenuti sono espressi in potenze dell'unità di variante u : ν_1 nella prima potenza, ν_2 , σ^2 , μ_2 nella seconda, ν_3 e μ_3 nella terza e ν_4 , μ_4 e $\frac{\Sigma (x^4)}{n}$ nella quarta.

Si ottengono poi queste altre tre costanti generali, servendosi di quattro momenti modificati:

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}; \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

$$F = 2 \beta_2 - 3 \beta_1 - 6.$$

Queste tre costanti: β_1 , β_2 e F sono numeri astratti, le prime due sempre positive, e danno senz'altro il tipo a cui appartiene la curva di probabilità.

Ecco uno specchietto che serve per l'analisi delle curve.

$$F > 0 \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 > 0 ; \beta_2 > 3 \dots \text{Tipo IV.} \\ \beta_1 = 0 ; \beta_2 > 3 \dots \text{Tipo II nel senso di Ludwig.} \end{array} \right.$$

$$F = 0 \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 > 0 ; \beta_2 > 3 \dots \text{Tipo V (Galton).} \\ \beta_1 = 0 ; \beta_2 = 3 \dots \text{Tipo I (Gauss).} \end{array} \right.$$

$$F < 0 \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 > 0 \dots \dots \dots \text{Tipo III.} \\ \beta_1 = 0 ; \beta_2 < 3 \dots \dots \text{Tipo II.} \end{array} \right.$$

Col crescere di F dai valori negativi ai valori positivi cresce

l'estensione dell'asse delle ascisse passando dall'essere nei due sensi limitato a illimitato.

Inoltre: $\beta_1 = 0$ dinota simmetria
 $\beta_1 > 0$ » asimmetria

Nel caso in cui F fosse di valore così piccolo, da lasciar dubbio sulla classificazione della curva, lo si moltiplica per μ_2^3 .

Se in tal caso il prodotto ottenuto sta entro i limiti $+1$ e -1 , la curva dovrà senz'altro essere classificata come se $F = 0$.

Con s si denota un'altra importante costante generale ausiliare che rappresenta sempre un numero astratto positivo.

$$s = \frac{6(\beta_2 - \mu_1 - 1)}{\sqrt{F^2}}$$

Pearson esprime la asimmetria di una curva di variazione, mediante il cosiddetto *fattore di asimmetria* A :

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{\beta_1} \frac{\beta_2 + 3}{5\beta_2 - 6\beta_1 - 9} \frac{\mu_3}{+\sqrt{\mu_3^2}}$$

che è un numero astratto, positivo o negativo dello stesso segno di μ_3 .

Esso è tale numero per il quale moltiplicato l'indice di variabilità, si ha la distanza d dell'ordinata massima y_m della curva dalla sua ordinata baricentrica y_c .

Nelle curve simmetriche le due ordinate coincidono, quindi $d = 0$; e siccome uno dei fattori, cioè l'indice di variabilità, è sempre diverso da zero, sarà zero l'altro fattore, cioè $A = 0$.

I tipi I e II che hanno $\beta_1 = 0$, hanno evidentemente $A = 0$ e sono i tipi simmetrici ⁽¹⁾.

Abbiamo:

$$\begin{aligned} \text{nel tipo III} & \frac{\beta_2 + 3}{5\beta_2 - 6\beta_1 - 9} = \frac{s + 2}{s - 2} > 1 \\ \text{» V} & = 1 \\ \text{» IV} & = \frac{s - 2}{s + 2} < 1 \end{aligned}$$

(1) Che il tipo della curva sia simmetrico, risulta direttamente dalle osservazioni, e quindi per conseguenza è $A = 0$. Non intendo assolutamente dire il reciproco, che non è vero in generale, che cioè se $A = 0$ il tipo è simmetrico.

Se sono così date e dedotte le costanti in numero di 8

$$n, M, \sigma, \beta_1, \beta_2, s, F, A$$

di un poligono di variazione, si può senz'altro costruire la curva del tipo corrispondente le cui equazioni sono date a pag. 337.

Riepilogo delle costanti generali d'un poligono di variazione.

Dati dall'esperienza: n , le V e le f .

Dedotti:

$$M = \frac{\sum (V)}{n}, \quad \log G = \frac{\sum (\log V)}{n},$$

$$d = \sqrt{M^2 - G^2}, \quad x = V - M$$

Costanti:

$$\nu_1 = \frac{\sum (V - V_m)}{n} = M - V_m \quad \nu_2 = \frac{\sum (V - V_m)^2}{n}$$

$$\nu_3 = \frac{\sum (V - V_m)^3}{n} \quad \nu_4 = \frac{\sum (V - V_m)^4}{n}$$

$$\sigma = \frac{1}{n} \sqrt{n \sum (V - V_m)^2 - [\sum (V - V_m)]^2} = \sqrt{\frac{\sum (x^2)}{n}} = \sqrt{\nu_2 - \nu_1^2}$$

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 \left(+ \frac{1}{6} \right) = \frac{\sum (x^2)}{n} \left(+ \frac{1}{6} \right)$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3 \nu_1 \nu_2 + 2 \nu_1^3 = \frac{\sum (x^3)}{n}$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4 \nu_1 \nu_3 + 6 \nu_1^2 \nu_2 - 3 \nu_1^4 \left(+ \frac{1}{10} \right)$$

$$= \frac{\sum (x^4)}{n} \left(+ \frac{\sum (x^2)}{n} + \frac{1}{15} \right)$$

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} \quad \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2}$$

$$F = 2 \beta_2 - 3 \beta_1 - 6 \quad s = \frac{6 (\beta_2 - \beta_1 - 1)}{\sqrt{F^2}}$$

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{\beta_1} \quad \frac{\beta_2 + 3}{5 \beta_2 - 6 \beta_1 - 9} \quad \frac{\mu_3}{\mu_2^2}$$

$$d = \sigma \cdot A$$

Togliamo dal *Duncker* (1) le formule che servono per il calcolo della curva di cui le precedenti costanti generali ci han potuto dare il tipo, e quindi per la costruzione del poligono di variazione teoretica le cui ascisse x siano le medesime di quella empirica, nonchè la formola che dà il valore Δ dell'errore, cioè della differenza fra osservazione e teoria. Questo Δ non è altro che la differenza di area fra il poligono empirico e il poligono teoretico.

$$\text{Tipo I : } y = y_0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$y_0 = \frac{n \cdot u \cdot i}{\sigma \sqrt{2\pi}}$$

$$3 \nu_2^2 - 2 \nu_1^4 \left(+ \frac{1}{60} \right) = 1 \quad (\text{Valore critico per il tipo I})$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{l - t^2} e^{-t^2} dt \quad (\text{Ogiva di Gallon})$$

$$\lim (\pm x) = \sigma \sqrt{2 l n \left(\frac{n}{\sigma \sqrt{2\pi}} \right)} \quad (\text{Origine teoretica delle variazioni})$$

$$\text{Tipo II : } y = y_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^m$$

$$a = \frac{b}{2} = \sigma \sqrt{s+1} = \sigma \sqrt{\frac{2\beta_2}{3-\beta_2}}$$

$$m = \frac{s-2}{2} = \frac{5\beta_2-9}{6-2\beta_2}; \quad y_0 = \frac{n \cdot u \cdot i}{a} \frac{\Gamma(m+1,5)}{\sqrt{\pi} \Gamma(m+1)} \quad (2)$$

$$y_0 = \frac{n \cdot u \cdot i}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot \frac{s-1}{\sqrt{(s+1)(s-2)}} \cdot \frac{1}{\sigma \cdot 4(s-2)}$$

(Valore d'approssimazione).

$$\text{Tipo III : } y = y_0 \left(1 + \frac{x}{a_1} \right)^{m_1} \left(1 - \frac{x}{a_2} \right)^{m_2}$$

(1) GEORG DUNCKER, *Die Methode der Variationsstatistik* - Sonderabdruck aus: « Archiv für Entwickelungsmechanik », Bd VIII. 1 Heft.

(2) Le Γ sono funzioni euleriane che si trovano già calcolate in apposite tavole. Però conviene adoperare il valore approssimato.

$$a_1 + a_2 = b = \frac{\sigma}{2} \sqrt{16 (s + 1) + \beta_1 (s + 2)^2}$$

$$a_1 = \frac{b - ds}{2} ; \quad a_2 = \frac{b + ds}{2}$$

$$m_1 = \frac{a_1}{b} (s - 2) ; \quad m_2 = \frac{a_2}{b} (s - 2)$$

$$y_0 = \frac{n \cdot ui}{b} \frac{m_1^{m_1} \cdot m_2^{m_2}}{(m_1 + m_2)^{m_1 + m_2}} \frac{\Gamma(m_1 + m_2 + 2)}{\Gamma(m_1 + 1) \Gamma(m_2 + 1)}$$

$$y_0 = \frac{n \cdot ui}{b} \frac{(m_1 + m_2 + 1) \sqrt{m_1 + m_2}}{\sqrt{2 \pi m_1 m_2}} e^{\frac{1}{12} \left(\frac{1}{m_1 + m_2} - \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right)}$$

(Valore d'approssimazione).

$$\text{Tipo IV : } y = y_0 (\cos \vartheta)^{r \cdot \vartheta}$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{x}{a} ; \quad \operatorname{arc} \vartheta = \frac{\pi \cdot \vartheta^{\circ}}{180^{\circ}}$$

$$a = \frac{\sigma}{4} \sqrt{16 (s - 1) - \beta_1 (s - 2)^2}$$

$$m = \frac{s + 2}{2} ; \quad md = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\beta_1} \cdot \frac{\beta_2 + 3}{2 \beta_2 - 3 \beta_1 - 6} \cdot \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_3^2}}$$

$$r = \frac{\sigma s (s - 2) \sqrt{\beta_1}}{4 a} \times \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_3^2}} = \frac{3 \sigma \sqrt{\beta_1} (\beta_2 + 3) (\beta_2 - \beta_1 - 1)}{a F^2} \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_3^2}}$$

$$\frac{v}{s} = \operatorname{tg} \varphi ; \quad y_0 = \frac{n \cdot ui}{a} \int_0^{\pi} \frac{e^{\frac{r \pi}{2}}}{(\operatorname{sen} \vartheta)^s e^{v \vartheta}} d \vartheta$$

$$y_0 = \frac{n \cdot ui}{a} \sqrt{\frac{2}{s \pi}} \frac{(\cos \varphi)^2}{(\cos \varphi)^{s+1}} - \frac{1}{12 s} - v \varphi$$

(Valore approssimato).

$$\text{Tipo V : } y = y_0 \left(1 + \frac{x}{a} \right)^p e^{-\frac{x}{a}}$$

$$a = \sigma \frac{4 - \beta_1}{2 \sqrt{\beta_1}} = \sigma \frac{1 - A^2}{A}$$

$$p = \frac{a}{d} = \frac{1 - A^2}{A^2}$$

$$y_0 = \frac{n \cdot ui}{a} e^{p \cdot r} (p + 1)$$

Valore dell'errore

$$\Delta = \frac{u \cdot (\sum (\sqrt{\delta_c^2} + \sum (\frac{\pm \delta_c \cdot \mp \delta_{c+1}}{\sqrt{\delta_c^2} + \sqrt{\delta_{c+1}^2}}))}{2 n \cdot ui} \cdot 100 \%$$

Quanto più piccolo è il Δ tanto più ci avviciniamo alla congruenza tra il poligono empirico e il poligono teoretico, e quindi tanto più soddisfacente è il risultato dell'osservazione.

Così una sufficiente descrizione della variazione di una caratteristica sta perfettamente nei soli dati: M , σ , Δ , n e nell'equazione della curva.

Per esempio la variazione del numero delle glandole di Müller del maiale è descritta precisamente così:

Dati: $M = 3,5010$; $\sigma = 1,6808$; $\Delta = 1,57 \%$; $n = 2000$

Equazione della curva (che è del tipo III) come si deduce dall'esame delle costanti generali.

$$y = 473,9 \left(1 + \frac{x}{4,2889} \right)^{4,8434} \times \left(1 - \frac{x}{15,6023} \right)^{17,6189}$$

Esempio illustrativo sulle variazioni.

(Studio fatto dal Duncker sulla variazione dei pungiglioni dorsali dell'*Acerina cernua* L.).

$$n = 1900; M = 14.1568; \sigma = 0.6040; \Delta = 1,00 \%; y = 1254,9 e^{-\frac{y^2}{0,6040^2}} \quad (\text{Tipo I})$$

Calcolo delle costanti generali:

	V	V - V _m	f	f(V - V _m)	f(V - V _m) ²	f(V - V _m) ³	f(V - V _m) ⁴
	11	- 3	1	- 3	9	- 27	81
	12	- 2	2	- 4	8	- 16	32
	13	- 1	189	- 189	189	- 189	189
V _m =	14	0	1234	0	0	0	0
	15	1	454	454	454	454	454
	16	2	20	40	80	160	320
			Σ = 1900	298	740	382	1076

$$M = 14.1568$$

$$\sigma = \frac{1}{1900} \sqrt{1900 \times 740 - 298^2} = \frac{1147,69}{1900} = 0.6040$$

$$G = 14,1439$$

$$\delta = 0,6051 = \sqrt{M^2 - G^2}$$

Calcolo della differenza tra poligono empirico e poligono teorico:

V	f	y	δ	$\frac{\pm \delta_c \times \mp \delta_{c+1}}{\sqrt{\delta_c^2} + \sqrt{\delta_{c+1}^2}}$
10	0	0,0	0,0	
11	1	0,0	+ 1,0 - 0,09
12	2	2,1	- 0,1	
13	189	200,4	- 11,4 - 7,46
14	1234	1212,4	+ 21,6 - 10,19
15	454	473,3	- 19,3 - 5,71
16	20	11,9	+ 8,1	
17	0	0,0	0,0	
Σ	1900	1900,1	+ 30,7 - 23,45
			- 30,8	
			Σ (√δ ²) =	61,5

$$\Delta = \frac{100 (61,5 - 23,45) \%}{3800} = 1,00 \%$$

$$\nu_1 = \frac{298}{1900} = 0,1568$$

$$\nu_3 = \frac{382}{1900} = 0,2011$$

$$\nu_2 = \frac{740}{1900} = 0,3895$$

$$\nu_4 = \frac{1076}{1900} = 0,5663$$

$$\mu_2 = 0,3895 - 0,1568^2 \left(+ \frac{1}{6} \right) = 0,5316; \left(\sigma^2 = 0,3895 - 0,1568^2 = 0,3649 \right)$$

$$\mu_3 = 0,2011 - 3 \times 0,1568 \times 0,3895 + 2 \times 1568^3 = 0,0257$$

$$\mu_4 = 0,5663 - 4 \times 0,1568 \times 0,2011 + 6 \times 0,1568^2 \times 0,3895 - 3 \times 0,1568^4 \\ (+ 0,4316) = 0,9275$$

$$\beta_1 = \frac{0,0257^2}{0,5316^3} = 0,0044;$$

$$\beta_2 = \frac{0,9275}{0,5316^2} = 3,2821$$

$$F = 2 \times 3,2821 - 3 \times 0,0044 - 6 = 0,5510 \left(\begin{array}{l} -1 < F \mu_2^3 < +1 \\ \beta_1 = 0 \text{ circa} \\ \beta_2 = 3 \text{ circa} \\ \text{quindi Tipo I} \end{array} \right)$$

$$s = \frac{6 \times (3,2821 - 0,0044 - 1)}{0,5510} = 24,8028$$

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{0,0044} \times \frac{0,2821}{7,3841} = 0,0282$$

$$d = 0,6040 \times 0,0282 = 0,0170; y_m \text{ circa } 14,1398$$

$$F \times \mu_2^3 = 0,0828 \text{ Tipo (IV) I}$$

$$(y_0 = \frac{1900}{0,6040 \sqrt{2 \pi}} = 1254,9 = y_m = y_c \text{ Costante speciale per tipo I})$$

Prima di passare all'argomento delle correlazioni chiudo questa prima parte coll'espore il concetto di *errore probabile*.

E per far questo non posso fare a meno di ricorrere ad alcune nozioni di calcolo infinitesimale.

La probabilità che l'errore accidentale commesso nel fare una osservazione, sia compresa fra una certa grandezza η e lo 0, è una funzione della stessa η , che chiameremo $f(\eta)$.

Se abbiamo $\eta_1 > \eta$, la probabilità che l'errore sia compreso fra 0 e η_1 è la probabilità composta dei due avvenimenti (errore fra 0 e η e errore fra η e η_1). Dimodochè abbiamo:

$$f(\eta_1) = f(\eta) + P$$

dove con P abbiamo indicato la probabilità che l'errore sia fra η e η_1 . Ne viene:

$$P = f(\eta_1) - f(\eta) \quad (1)$$

ossia. poichè ammettiamo $\eta_1 = \eta + d\eta$, otteniamo:

$$P = df(\eta) = f'(\eta)d\eta$$

e perciò:

$$f'(\eta) = \int_0^{\eta} f''(\eta_1) d\eta_1 \quad (2)$$

$f'(\eta) d\eta$ esprime la probabilità che l'errore sia compreso fra η e $\eta + d\eta$; ossia la probabilità che l'errore sia η è espressa da $f'(\eta)$

Vediamo ora di quali notevoli proprietà goda la funzione $f'(\eta)$

Essendo egualmente probabili un errore positivo ed uno negativo di egual valore assoluto, avremo anzitutto:

$$f'(\eta) = f'(-\eta)$$

Inoltre poichè è più probabile commettere un errore minore che uno maggiore, $f'(\eta)$ per η positivo è una funzione decrescente indefinitamente al crescere di η .

Infine poichè è certo che l'errore commesso sta fra $-\infty$ e $+\infty$, e la certezza viene rappresentata con l'unità, otteniamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(\eta) d\eta = 1 \quad (3)$$

Conoscendo queste proprietà sappiamo costruire graficamente la funzione $f'(\eta)$ mediante la linea $\zeta = f'(\eta)$ detta *curva degli errori*.

Questa curva risulta simmetrica rispetto all'asse delle ζ , unimodale con moda coincidente con detto asse e asintotica rispetto all'asse delle η ⁽¹⁾.

L'area compresa fra l'arco di curva $\zeta\zeta$, la sua proiezione $\eta \eta_1$ sulle ascisse e le ordinate $\zeta\zeta_1$, corrispondenti rappresenta la probabilità che l'errore cada fra i valori η e η_1 .

Noi cercheremo di determinare teoricamente questa funzione fondandoci sul postulato di Gauss: Il valore più accettabile di una grandezza è la media aritmetica dei valori di quella grandezza desunti da misure di egual precisione di essa fatte più volte.

Siano ora n misure $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$ eseguite con egual precisione di una medesima grandezza ignota μ . Secondo il postulato di Gauss il valore più accettabile di questa grandezza è:

$$\mu = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_n}{n} \quad (4)$$

(1) Vedi la figura in basso a pag. 333.

Nelle singole misure gli errori commessi saranno $\mu - \mu_1 = \eta_1$;
 $\mu - \mu_2 = \eta_2$; $\mu - \mu_n = \eta_n$.

La probabilità di commettere un errore η_1 è, come sappiamo $f''(\eta_1)$; quella di commettere un errore η_2 è $f''(\eta_2)$, e così via, per η_n è $f''(\eta_n)$.

Quindi la probabilità composta di commettere simultaneamente in n misure tutti gli n errori è

$$\varphi(\mu) = f''(\eta_1) \times f''(\eta_2) \times \dots \times f''(\eta_n) \quad (5)$$

Dovendo però essere massimo il valore di $\varphi(\mu)$ per il valore di μ dato dalla (4), bisognerà che la derivata prima di $\varphi(\mu)$ rispetto a μ diventi nulla per quel valore di μ , cioè bisognerà che sia

$$\varphi'(\mu) = 0 \quad (6)$$

Dalla (5) viene

$$\log \varphi(\mu) = \log f''(\eta_1) + \log f''(\eta_2) + \dots + \log f''(\eta_n)$$

e quindi derivando

$$\frac{\varphi'(\mu)}{\varphi(\mu)} = \frac{f'''(\eta_1)}{f''(\eta_1)} + \frac{f'''(\eta_2)}{f''(\eta_2)} + \dots + \frac{f'''(\eta_n)}{f''(\eta_n)}$$

o, con notazione più semplice, ponendo $\frac{f'''(\eta)}{f''(\eta)} = \chi(\eta)$

$$\frac{\varphi'(\mu)}{\varphi(\mu)} = \sum_1^n \chi(\eta).$$

Per la (6), poichè $\varphi(\mu)$ è diversa da zero, dovrà essere per il valore (4) di μ

$$\sum_1^n \chi(\eta) = 0 \quad (7).$$

Per causa della (4) abbiamo

$$\sum_1^n \eta_i = 0 \quad (7^1)$$

e la (7) può tradursi anche così:

$$\sum_1^{n-1} \chi(\eta) + \chi(-\eta_1 - \eta_2 - \eta_3 - \dots - \eta_{n-1}) = 0.$$

Ora dimostriamo che $\chi'(\eta)$ è una costante.

Difatti se al posto delle misure $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ avessimo fatto le misure $(\mu_1 - h), (\mu_2 - h), \dots, (\mu_n - h)$ il valore (4) di μ sarebbe evidentemente lo stesso, ma il valore η_1 diventerebbe

$(\eta_1 + h)$, η_n diventerebbe $(\eta_n - h)$, rimanendo inalterate le altre η_i e invece della (7) avremmo

$$\chi(\eta_1 + h) + \chi(\eta_n - h) + \sum_2^{n-1} \chi(\eta_i) = 0 \quad (8).$$

Diminuendo la (8) della (7) e dividendo per h otteniamo

$$\frac{\chi(\eta_1 + h) - \chi(\eta_1)}{h} + \frac{\chi(\eta_n - h) - \chi(\eta_n)}{h} = 0$$

ovvero

$$\frac{\chi(\eta_1 + h) - \chi(\eta_1)}{h} = - \frac{\chi(\eta_n - h) - \chi(\eta_n)}{-h}$$

e passando al limite per $h = 0$ si ha

$$\chi'(\eta_1) = \chi'(\eta_n).$$

Analogamente si otterrebbe

$$\chi'(\eta_2) = \chi'(\eta_n); \dots \chi'(\eta_{n-1}) = \chi'(\eta_n).$$

Considerando ora che $n - 1$ dei valori η possono essere presi ad arbitrio, dipendendo per la (7¹) la n *esima* da tutte le altre, si potrà concludere che la funzione $\chi'(\eta)$ è una funzione che assume sempre uno stesso valore per qualunque valore della variabile indipendente, quindi è una costante

$$\chi'(\mu) = K$$

come si voleva dimostrare. Integriamo e otteniamo

$$\chi(\eta) = K\eta + G$$

essendo G una nuova costante. La (7) diventa allora:

$$K \sum_1^n \eta_i + nG = 0$$

ossia, a causa della (7¹)

$$nG = 0$$

cioè, poichè n è diversa da zero

$$G = 0$$

e quindi sarà

$$\chi(\eta) = K\eta$$

o anche, per la posizione fatta più sopra,

$$\frac{f''(\eta)}{f'(\eta)} = K\eta$$

Il Calcolo infinitesimale c'insegna a integrare questa espressione, che integrata diventa

$$f'(\eta) = K_1 e^{-k\eta^2}$$

Poichè, come sappiamo, $f'(\eta)$ è una funzione decrescente, k deve essere negativa. Poniamo quindi $k = -2k^2$ avremo allora

$$f'(\eta) = K_1 e^{-k^2\eta^2}$$

Per la (3) abbiamo

$$K_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2\eta^2} d\eta = 1 \quad (9)$$

Il Calcolo infinitesimale ci insegna che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}$$

o, ciò che è lo stesso:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Ponendo $\tau = K\eta$ e osservando che anche $\eta = \pm\infty$ per $\tau = \pm\infty$, otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2\eta^2} k d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{k}$$

Sostituendo nella (9) questo valore dell'integrale, viene

$$K_1 \frac{\sqrt{\pi}}{k} = 1, \text{ ossia } K_1 = \frac{k}{\sqrt{\pi}}$$

così sappiamo anche il valore dell'altra costante K_1 .

Quindi la funzione cercata sarà

$$f'(\eta) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2\eta^2}$$

Allora sarà $f(\eta) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-k^2\eta^2} d\eta$

$$\text{L'equazione } f'(\eta) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 \eta^2}$$

considerando come prima $k \eta = \tau$, e la $f'(\eta)$ funzione composta di η mediante τ , dà

$$\frac{d f'(\eta)}{d \eta} = \frac{d f'(\eta)}{d \tau} \frac{d \tau}{d \eta} = k \frac{d f'(\eta)}{d \tau} = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-\tau^2}$$

cioè
$$\frac{d f'(\eta)}{d \tau} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\tau^2}$$

da cui
$$f'(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} e^{-\tau^2} d \tau$$

oppure
$$f'(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{k \eta} e^{-\tau^2} d \tau$$

Poniamo in forma più generale

$$\Pi(k \eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{k \eta} e^{-\tau^2} d \tau$$

otterremo
$$f'(\eta) = \frac{1}{2} \Pi(k \eta).$$

Ciò significa che la probabilità che il valore assoluto dell'errore sia compreso fra 0 e η sarà $2 f'(\eta)$ cioè $\Pi(k \eta)$.

La funzione $\Pi(k \eta)$ è nulla per $\eta = 0$ e ha valore 1 per $\eta = \infty$; cresce con molta rapidità al crescere di η a partire da zero.

I valori di questa funzione per diversi valori dell'argomento $k \eta$ furono da Encke ⁽¹⁾ esposti in una tavola di cui riportiamo una parte:

$k \eta$	Π	$k \eta$	Π
0,0	0,0000	1,1	0,8802
0,1	0,1125	1,2	0,9103
0,2	0,2227	1,3	0,9340
0,3	0,3286	1,4	0,9523
0,4	0,4284	1,5	0,9661
0,5	0,5205	1,6	0,9763
0,6	0,6039	1,7	0,9838
0,7	0,6778	1,8	0,9891
0,8	0,7421	1,9	0,9928
0,9	0,7969	2,0	0,9953
1,0	0,8427		

(1) Berlin. Jahrb. 1834.

Questa tavola si applica direttamente nel caso che k sia uguale all'unità. Essa per es. c' insegna che la probabilità che l'errore η non superi $\pm 0,1$ è espressa da 0,112, ossia che su 1000 osservazioni è probabile che 112 dei 1000 errori commessi stiano fra $+0,1$ e $-0,1$; ovvero che si può scommettere 112 contro 888 che l'errore di una osservazione ancora da farsi sia inferiore a 0,1.

Nel caso che k non sia uguale a 1, per usare la tavola conviene sostituire ai numeri 0,1; 0,2 ecc. le quantità $\frac{0,1}{k}, \frac{0,2}{k}, \frac{0,3}{k},$ ecc.

Fra i valori dell'argomento $k \eta$ è importante quella a cui corrisponde la probabilità $\Pi = \frac{1}{2}$, e dalla tavola di Encke si trova mediante interpolazione che esso è

$$\varphi = 0,476936$$

Il valore di $\eta = \frac{k \eta}{k}$ a cui compete la probabilità $\frac{1}{2}$ ossia quell'errore per cui è ugualmente probabile che un errore qualunque gli rimanga inferiore o che lo oltrepassi è dunque

$$E = \frac{\varphi}{k} = \frac{0,476936}{k} \tag{10}$$

Questo errore così definito denominasi *errore probabile*. Ci resta ancora da determinare il valore e il significato di k .

Gli errori si possono riguardare come eventi indipendenti e quindi la probabilità che in una serie di n osservazioni egualmente attendibili si presentino insieme gli errori $\eta_1 \eta_2 \dots \eta_n$ ai quali corrispondono rispettivamente le probabilità

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 \eta_1^2}, \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 \eta_2^2}, \dots \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 \eta_n^2}$$

è data dal prodotto $P = \left(\frac{k}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-k^2 \sum_1^n \eta_i^2}$

che, ponendo $v = \sqrt{\frac{\sum \eta_i^2}{n}}$

si può scrivere anche così: $P = \left(\frac{k}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-k^2 n v^2}$

Perchè la somma dei quadrati degli errori sia minima bisogna

che sia P massimo, e quindi bisogna che sia nulla la sua derivata prima rispetto a k .

$$\text{Quindi dovremo avere } \frac{dP}{dk} = n P \left(\frac{1}{k} - 2 k \sigma^2 \right) = 0$$

Da qui otteniamo $k = \frac{1}{\sigma \sqrt{2}}$ e quindi sostituendo in (10)

$$E = 0,476936 \sqrt{2} \times \sigma = 0,674486 \times \sigma$$

che è l'espressione dell'errore probabile.

La quantità k riceve il nome di *misura o modulo di precisione* (*mensura praeisionis* di Gauss). Secondo queste norme generali che ho sopra esposto il Pearson ⁽¹⁾ in unione con Filon determinò la formola con cui mediante i parametri σ e n d'una curva di variazione si possa calcolare l'errore probabile della deviazione normale E_σ .

$$\text{Essa è } E_\sigma = \frac{\sigma \times 0,6745}{\sqrt{2n}}$$

L'errore probabile secondo Gauss di una determinazione di media è dedotto mediante la formola

$$E_M = \frac{\sigma \times 0,6745}{\sqrt{n}}$$

CORRELAZIONE

Veniamo ora a trattare dell'argomento non meno importante della correlazione fra due o più caratteristiche di una quantità di individui d'una stessa unità formale.

Allorquando in un determinato numero di individui della medesima unità formale variano contemporaneamente due o più caratteristiche, ogni individuo viene in tal modo contrassegnato da una determinata combinazione di varianti di questa caratteristica.

È noto da quel che abbiamo visto nel precedente studio sulla variazione, che le singole varianti di una medesima caratteristica,

(1) Mathematical contributions to the theory of evolution IV « On the probable errors of frequency constants and of the influence of random selection on variation and correlation ». Philos. Transact. Roy. Soc. London. Vol. 191 A. N. 220. pag. 229-311.

ricorrono con frequenze diverse, ma pure regolari, in modo che, p. e. le varianti medie sono di solito più frequenti delle estreme. Fintanto che le caratteristiche variano del tutto indipendentemente fra loro, entro il gruppo di individui devono le singole combinazioni di varianti presentarsi in modo corrispondente alla frequenza di ogni singola delle varianti che le compongono, e ciò secondo le regole della teoria della probabilità.

La formula, che esprime la frequenza di una determinata combinazione di varianti di c caratteristiche fra n individui, è

$$\frac{f_1 f_2 \dots f_c}{n^{c-1}}$$

dove le f indicano le frequenze delle corrispondenti varianti negli n individui.

Se si separano adesso tutti gli f_i individui, che in una sola delle c caratteristiche combinate, mostrano una determinata variante singola V_i , e se si ricerca in quale relativa frequenza ricorrono in queste le varianti singole delle rimanenti $c - 1$, caratteristiche bisognerà ricavare per queste ultime lo stesso poligono percentuale di variazione come nella ricerca del numero totale degli individui e per conseguenza anche lo stesso valore medio, lo stesso indice di variabilità e anche le stesse costanti che per questi.

Abbiamo quindi:

Per variazioni indipendenti di diverse caratteristiche, quegli individui che presentano una determinata variante di una delle caratteristiche, si comportano per le altre rimanenti caratteristiche nello stesso modo come si comporterebbe il totale degli individui.

La frequenza delle singole combinazioni di varianti è funzione della frequenza delle varianti componenti, e ciò corrispondentemente a quanto insegna il calcolo delle probabilità.

Consideriamo dapprima il caso più semplice di correlazione di due sole caratteristiche di un certo numero n di individui d'una medesima unità morfologica; per es. la correlazione delle glandule Mülleriane collaterali in 2000 maiali maschi, secondo *Davenport* e *Bullard*.

Lo schema di combinazione a due a due delle varianti è il seguente:

Numero di ghiandole (varianti)

V_i di sinistra	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
di destra	15
0	8	5	2
1	4	151	58	9	3	225
2	2	65	154	96	28	7	1	353
3	14	88	173	128	28	6	437
4	5	27	119	153	77	26	3	1	.	.	411
5	1	7	24	92	101	52	11	9	.	.	297
6	8	16	58	48	16	7	.	2	155
7	1	8	20	18	17	9	5	.	78
8	1	3	5	3	2	2	.	16
9	1	3	3	2	2	1	12
10	1	.	1
Σf	14	241	336	430	429	295	159	53	30	10	3	2000 = n

Si dispongono in una riga le varianti di partenza V_s che si dicono *varianti supposte*, e in una colonna a sinistra nello stesso ordine di successione partendo dal minimo comune 0, le *varianti subordinate*.

Nel campo formato da questi due lati variantivi, si dispongono le frequenze delle singole combinazioni di una variante qualunque in colonna. Laddove la frequenza è nulla non si scrive nessuna cifra. Per es. all'incontro della verticale e della orizzontale che passano rispettivamente per le varianti $V_s = 0$ e la subordinata 0, si scrive 8, che vuol dire che 8 volte si è trovata la combinazione (0.0). Al punto d'incontro della verticale passante per $V_s = 5$ e per la subordinata 4 si scrive 77, che vuol dire che 77 volte s'è trovata la combinazione (5.4), e così via.

La somma di tutte quante le frequenze di combinazioni, deve essere eguale alla somma 2000 di tutti gli individui. La somma delle frequenze di combinazioni disposte lungo una riga o lungo una colonna, deve essere eguale alla frequenza della sola variante che sta in testa alla riga o alla colonna. Per esempio, il numero 241, equivale alla frequenza della sola variante supposta $V_s = 1$, che sta in testa alla colonna che lo contiene in tutti i 2000 individui. Il numero 155, equivale alla frequenza totale della sola variante subordinata $V = 6$, che sta in testa alla riga che tal numero contiene.

Per caso di variazione indipendente restano, come sappiamo, costanti la media aritmetica M , l'indice di variabilità ε , ecc. delle

diverse serie di variazioni subordinate di una caratteristica che appartengono alle supposte singole varianti dell'altra caratteristica, cioè restano eguali ai corrispondenti valori della serie totale di variazione della caratteristica subordinata, e le frequenze di queste serie di variazioni restano percentualmente eguali, sia se si considera una serie estranea, sia se una intermedia.

Nel fatto, non sembra che un simile comportamento si presenti mai regolarmente; molto più spesso si rende evidente una forte deviazione delle serie consecutive subordinate e delle loro costanti colla deviazione grande o piccola, positiva o negativa, delle varianti supposte dalla loro media.

Tali deviazioni consistono, sia nel crescere, sia nel diminuire del valore medio delle serie variantive subordinate col crescere dei valori numerici delle varianti supposte; nell'abbassamento dell'indice di variabilità delle singole serie variantive subordinate di fronte all'indice totale di variabilità della caratteristica considerata come subordinata, e, più spesso inoltre, nella variazione di forma dei poligoni percentuali di frequenza di queste serie variantive, in modo che quelli delle serie estreme siano asimmetrici (e in sensi opposti ai due estremi), quelli nel mezzo siano più simmetrici (quindi variazione dei relativi rapporti di frequenza) e infine, nella corrispondente variazione delle costanti delle curve delle serie variantive subordinate.

Questo fatto prova che la frequenza delle combinazioni di varianti delle due caratteristiche è determinata da tutt'altro che dal caso, è invece determinata dal calcolo delle probabilità.

Togliamo dal Duncker la seguente definizione.

« *Si deve intendere per correlazione quel modo reciproco di comportarsi di due o più caratteristiche di una unità formale il quale ha per effetto, che col variare di una di queste caratteristiche, tutte le altre devono parimenti variare in una determinata direzione o in senso opposto o nello stesso senso. Questo modo reciproco di comportarsi, può essere diretto (correlazione in senso stretto) in modo che la variazione di una delle caratteristiche sia la causa, o corrispondentemente l'effetto di quella delle altre, oppure può essere indiretto, in modo cioè che quelle stesse cause che operano la variazione di una delle caratteristiche, producono anche la variazione delle altre. (Simplasia secondo Haacke) ».*

Vediamo ora come si determina il così detto *grado di correlazione*.

Vi sono due limiti teorici, non realizzabili in natura, uno inferiore e l'altro superiore per il grado d'intensità. Tra questi due limiti esistono molteplici gradi intermedi realizzabili in natura. Il limite inferiore consiste nella mancanza totale di qualunque relazione correlativa fra due caratteristiche. L'altro limite, deve essere quello nel quale ad ogni singola deviazione individuale di una delle caratteristiche, corrisponde una perfetta uguale deviazione dell'altra.

La correlazione del primo limite, deve essere necessariamente denotata collo zero. Per quella del secondo limite, si potrebbe a priori scegliere un numero qualunque, positivo o negativo secondo che le deviazioni delle due caratteristiche seguono nello stesso senso od in senso inverso. Tutti i casi intermedi vengono allora designati con numeri positivi o negativi, compresi fra lo zero e quel valore superiore scelto.

Nel caso del più alto grado di correlazione appartenente ad un determinato aggruppamento, viene esclusivamente ed equabilmente influenzato da esso. In conseguenza di che, nello schema di combinazioni di due caratteristiche, non è più subordinata ad ogni variante supposta dell'una caratteristica una serie di variazioni dell'altra consistente di parecchie varianti e delle loro frequenze, ma bensì solo una singola variante di questa, la quale, naturalmente, nel numero complessivo degli individui osservati deve presentarsi nella stessa frequenza che la variante supposta. È quindi condizione perchè due caratteristiche stieno tra loro in perfetta correlazione che i loro poligoni di variazione sieno congruenti. E perciò nello schema, le frequenze di combinazioni devonsi disporre in una serie di numeri schierati diagonalmente.

Per esempio: correlazione *perfetta* fra due caratteristiche con poligoni di variazione congruenti:

II: - 3	- 2	- 1	0	1	2	3		
I								$M = 0$
- 3	4							4
- 2		54						54
- 1			242					242 $\sigma = 1$
0				400				400
1					242			242 $r = 1$
2						54		54
3							4	4
	4	54	242	400	242	54	4	1000 = n

In una *correlazione imperfetta*, ma non mancante, le frequenze di combinazione coprono una superficie più estesa dello schema, però sempre in modo che i più grandi valori di queste, seguano più o meno la direzione diagonale. *È questo il comportamento che più frequentemente ricorre nel campo delle osservazioni biologiche.*

Per es. *Correlazione imperfetta* fra due caratteristiche con poligoni di variazione congruenti.

II :	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3		
I :									
	- 3		2	2					4
	- 2	2	13	24	13	2			54 $M = 0$
	- 1	2	24	95	95	24	2		242 $\sigma = 1$
	0		13	95	184	95	13		400
	1		2	24	95	95	24	2	242 $r = \frac{1}{2}$
	2			2	13	24	13	2	54
	3					2	2		4
		4	54	242	400	242	54	4	1000 = n

In una *correlazione mancante* infine, le maggiori frequenze di combinazione risultano ordinate in due serie ortogonali incrociantesi press'a poco nel mezzo dello schema, intorno a cui più o meno simmetricamente vengono ad aggrupparsi le minori frequenze.

Per es.: *Correlazione mancante* fra due caratteristiche, ecc.

II. :	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3		
I. :									
	- 3			1	2	1			4 $M = 0$
	- 2		3	13	22	13	3		54 $\sigma = 1$
	- 1	1	13	59	96	59	13	1	242 $r = 0$
	0	2	22	96	160	96	22	2	400
	1	1	13	59	99	59	13	1	242
	2		3	13	22	13	3		54
	3			1	2	1			4
		4	54	242	400	242	54	4	1000 = n

Il valore r che abbiamo riportato a fianco di ciascuno dei tre precedenti schemi è il così detto:

Coefficiente di correlazione di Galton, usato da questo A. nei suoi studi, e che è come vedremo non esente da qualche difetto. Il metodo Galtoniano per calcolarlo è il seguente:

Per ogni variante supposta si ricava la media aritmetica della corrispondente serie variantiva della caratteristica subordinata; si

determinano quindi da un lato, le differenze di queste medie colla media totale della caratteristica subordinata $m_z - M_z = z$, dall'altro lato, le differenze delle varianti supposte con la media totale della caratteristica supposta $V_s - M_s = x$, e queste differenze si dividono per le deviazioni normali rispettivamente σ_z , σ_s delle loro caratteristiche, risultando così le deviazioni relative $\frac{z}{\sigma_z}, \frac{x}{\sigma_s}$. Si fanno i prodotti di queste ultime quantità e si sommano ottenendo $\sum \left(\frac{z}{\sigma_z} \cdot \frac{x}{\sigma_s} \right)$ e questa somma si divide per il numero a che rappresenta il numero delle diverse varianti supposte. Si ha quindi per la formula di *Galton* del coefficiente di correlazione r l'espressione:

$$r = \frac{\sum \left(\frac{z}{\sigma_z} \cdot \frac{x}{\sigma_s} \right)}{a}$$

Se esiste congruenza per i poligoni di variazione di tutte e due le caratteristiche, e se esiste anche correlazione perfetta, sarà $z = x$ e $\frac{z}{\sigma_z} = \frac{x}{\sigma_s}$ e allora per il valore limite superiore di r , si ha:

$$r = \frac{\sum \left(\frac{\pm x \cdot \sigma}{\sigma \cdot \mp x} \right)}{a} = \frac{\sum (\pm 1)}{a} = \pm 1$$

Se è $z_1 = z_2 = \dots = z_a = 0$, cioè se è sempre $m_z = M_z$ sarà $r = 0$.

Quindi sappiamo come definire in modo concreto il coefficiente di correlazione. Esso è aritmeticamente definito: come un numero astratto, frazione propria positiva o negativa, compresa fra i valori limiti 0 e ± 1 .

Siccome si possono invertire le caratteristiche, assumendo come supposta la subordinata, si ottengono in tal modo due valori per r spesso non insensibilmente divergenti.

Vediamo ora come si costruisce graficamente secondo *Galton*, un campo di correlazione.

Si portano come punti sull'uno o sull'altro asse coordinato, i valori $\frac{x}{\sigma_s}$ e $\frac{z}{\sigma_z}$. Allora i punti d'incontro delle coordinate erette sui punti così disposti, si schierano approssimativamente lungo una

retta, che con l'asse scelto per la rappresentazione dei punti $\frac{x}{\sigma_s}$, forma un angolo φ la cui tangente è r .

Quindi il coefficiente di correlazione può essere definito con la formula $r = tg \varphi$.

Gli inconvenienti della formula Galtoniana consistono in ciò che le frequenze combinatorie empiriche usate con la media m_2 non vengono considerate e che il quoziente $\frac{\bar{x}}{\sigma_2} \cdot \frac{\sigma_s}{x}$ ha lo stesso peso nel procedimento del calcolo sia che le varianti supposte siano rare o frequenti.

Pearson propose, per eliminare il suddetto inconveniente, la formula di *Bravais*. Con questa cessa la distinzione tra caratteristica supposta e corrispondente subordinata, di guisa che per r , risulta un solo valore, ed è resa inutile la determinazione dei singoli valori medi subordinati m_2 .

La formula di *Bravais* è:

$$\frac{\Sigma (x_1 \cdot x_2)}{\sqrt{\frac{\Sigma (x_1^2)}{n}} \sqrt{\frac{\Sigma (x_2^2)}{n}}}$$

dove x_1 ed x_2 sono le deviazioni *V-M* delle due caratteristiche, n è il numero degli individui; e i due radicali rappresentano gli indici di variabilità σ_1 ed σ_2 delle due caratteristiche.

Stesso esempio di pag. 355.

II a sinistra	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
I a destra I												II	15
	[- 3	- 2	- 1	0	0	1	2	3	4	5	6]	$\Sigma (f)$	
0	- 3	8	5	2								II	15
1	- 2	4	151	58	9	3							225
2	- 1	2	65	154	96	28	7	1					353
3	0		14	88	173	128	28	6					437
4	0		5	27	119	153	77	26	3	1			411
5	1		1	7	24	92	101	52	11	9			297
6	2				8	16	58	48	16	7		2	155
7	3				1	8	20	18	17	9	5		78
8	4					1	3	5	3	2	2		16
9	5	III					1	3	3	2	2	1	12
												I IV	1
10	6 $\Sigma (f)$	14	241	336	430	429	295	159	53	30	10	3	2000 = n

Si supponga, essendo il minimo variantivo comune a sinistra in alto di un campo di correlazione, che questo campo sia diviso in quattro parti (quadranti) I II III IV mediante due rette incrociantesi ortogonalmente, corrispondenti alle posizioni delle due medie aritmetiche caratteristiche. Allora il primo quadrante contiene solo frequenze combinatorie di deviazioni negative, che naturalmente risulteranno positive; lo stesso sarà per le frequenze del IV quadrante, perchè i fattori nelle combinazioni sono insieme positivi; il II e III quadrante contengono frequenze negative risultanti da deviazioni di segno contrario. Nel caso di correlazione mancante è evidente, data la perfetta simmetria di distribuzione delle frequenze combinatorie dei quattro quadranti, che la somma totale è nulla. Nel caso comune delle correlazioni, che sono intermedie fra la mancante e la perfetta coi prodotti combinatori che stanno nella diagonale delle maggiori frequenze, saranno corrispondentemente a questa diagonale: o tutti positivi, se la diagonale va dal I al IV quadrante, o tutti negativi, se essa va dal II al III. Essi superano in valore tutti gli altri prodotti e quindi l'espressione $\Sigma (x_1 \cdot x_2)$ darà un numero positivo o negativo. Cotesto numero, raggiunge un massimo quando tutte le frequenze di combinazione vengono a raccogliersi unicamente sull'una o sull'altra diagonale, e l'intensità correlativa perviene alla sua maggiore espressione.

Allora è $x_1 = x_2$, $\sigma_1 = \sigma_2$, quindi:

$$\frac{\Sigma (x_1 \cdot x_2)}{n} = \frac{\Sigma (\pm x^2)}{n} = \pm \sigma^2$$

$$r = \frac{\Sigma (x_1 \cdot x_2)}{n \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2} = \pm 1$$

Anche con questo metodo abbiamo per r un valore massimo di ± 1 , di modo che tale coefficiente viene ancora aritmeticamente definito quale numero frazionario proprio, astratto, positivo o negativo, contenuto tra i limiti 0 e ± 1 .

Poichè la media aritmetica e con essa le deviazioni d'una caratteristica, danno quasi esclusivamente numeri fatti, ed il calcolo acquista tanta più precisione, quante più cifre decimali vengono conservate, l'impiego diretto della formula del Bravais diventa più difficile ad adoperarsi in conseguenza di numerose moltiplicazioni con

molti decimali e facilmente conduce ad errori di calcolo. Convieni perciò modificarla come segue, secondo suggerisce il *Duncker*.

Le deviazioni $V - M = x$ di ognuna delle due caratteristiche si ripartiscono in deviazioni positive e deviazioni negative; esse differiscono fra loro di un'unità di variante, oppure di un multiplo intero di unità di variante ed hanno frazioni improprie, che risultano composte dei numeri interi $0, \pm 1, \pm 2$ etc. e di frazioni proprie che in deviazioni negative sono identiche alla frazione propria componente la media, e nelle positive sono uguali alla complementare di questa. P. es.

$$M = 3,501 \left\{ \begin{array}{l} \text{d. negative} - 0,501, - 1,501, - 2,501 \dots\dots \\ \text{d. positive} + 0,499, + 1,499, + 2,499 \dots\dots \end{array} \right.$$

(0,499 = 1,000 - 0,501).

Si designino ora con $\pm x_1$ e $\pm x_2$ le parti intere delle singole deviazioni delle due caratteristiche, le frazioni complementari di quelle che compongono le loro medie con ξ_1 e ξ_2 , le singole frequenze di combinazione con f , e infine si denoti coll'indice I fino a IV annessi ai segni di sommatoria (Σ), in quali quadranti dello schema si devano condurre le corrispondenti operazioni di somma e allora, nel caso che M e quindi anche x , siano numeri fratti sarà:

$$\frac{\Sigma (x_1 \cdot x_2)}{n} = \frac{\Sigma_{IV} (f x_1 x_2) - \Sigma_I (f x_1) - \Sigma_I (f x_2) + \Sigma_I (f) - \Sigma_{II} (f x_2) - \Sigma_{III} (f x_1)}{n} - \xi_1 \xi_2$$

Tutte le espressioni di somma Σ danno qui evidentemente numeri interi, poichè interi sono i numeri f, x_1 e x_2 ; di essi sono positivi $\Sigma_I (f x_1 x_2), \Sigma_{IV} (f x_1 x_2), \Sigma_I (f), \Sigma_{II} (f x_2), \Sigma_{III} (f x_1)$; e invece negativi $\Sigma_{II} (f x_1 x_2), \Sigma_{III} (f x_1 x_2), \Sigma_I (f x_1), \Sigma_I (f x_2)$.

La formula ed il sottoriportato esempio, indicano chiaramente le operazioni da eseguirsi. Per avere r , si deve dividere il tutto per $\sigma_1 \cdot \sigma_2$.

L'esempio si riferisce alle solite osservazioni sulle glandole mülleriane di 2000 maiali maschi rapportandoci allo schema di pagina 360.

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{iv} (f \cdot x_1, x_2) &= 1142 - 9 - 9 + 1653 \\
 - \Sigma_i (f \cdot x_1) - \Sigma_i (f \cdot x_2) + \Sigma_i (f) &= + 806 + 814 + 829 \\
 - \Sigma_{ii} (f \cdot x_2) - \Sigma_{iv} (f \cdot x_1) &= - 49 - 51
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} \Sigma_{iv} \\ - \Sigma_i \\ - \Sigma_{ii} \end{aligned}} \right\} :$$

$$\begin{aligned}
 n &= 5126 : 2000 = 2,5630 \\
 - \xi_1 \xi_2 &= - 0,2088 \\
 &2,3542
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_1 &= 3,5465 & M_2 &= 3,5395 & r &= \frac{2,3542}{\sigma_1 \sigma_2} = 0,7919 \\
 \sigma_1 &= 1,7195 & \sigma_2 &= 1,7304
 \end{aligned}$$

Diamo un cenno sulla correlazione di più di due caratteristiche per il cui calcolo non esistono finora buoni metodi.

Dovrebbe essere senz'altro evidente che di solito due caratteristiche non stanno in correlazione con un'altra, e tuttavia tra loro possono intercedere correlazioni di qualunque grado.

Solo quando entrambe stanno in perfetta correlazione colla terza caratteristica ($r = \pm 1$) debbono tra loro due, in ogni caso, predominare perfette correlazioni positive o negative.

Yule, ha dato valori limiti pel coefficiente di correlazione r_{ac} di due caratteristiche a e c che stanno con una terza b nei rapporti correlativi r_{ab} e r_{bc} . In tal caso r_{ac} sta tra i limiti:

$$r_{ab} \times r_{bc} \pm \sqrt{r_{ab}^2 \times r_{bc}^2 - r_{ab}^2 - r_{bc}^2} + 1$$

Se è $r_{ab} = r_{bc} = 0$, allora r_{ac} resta completamente incognito (tra i valori limiti ± 1) e deve essere determinato mediante speciali ricerche.

Se è $r_{ab} = r_{bc} = \pm 1$, è allora $r_{ac} = + 1$;

Se infine è $r_{ab} = \pm 1$, e $r_{bc} = \mp 1$, è allora $r_{ac} = - 1$.

Se si considera una caratteristica a come supposta, e si ricerca la correlazione intercedente tra le deviazioni ad essa subordinate di due caratteristiche b e c , fintantochè queste indipendentemente da a stanno fra loro nel rapporto r_{bc} , e singolarmente stanno rispetto ad a nei rapporti r_{ab} e r_{ac} , questa correlazione delle deviazioni subordinate risulta secondo Yule espressa dalla formula:

$$r_{bc} = \frac{r_{bc} - r_{ab} \times r_{ac}}{\sqrt{(1 - r_{ab}^2)(1 - r_{ac}^2)}}$$

Inoltre, secondo lo stesso autore, sussiste tra le deviazioni di a da un lato e le contemporaneamente subordinate di b e c dall'altro,

e quindi tra tutte e tre le caratteristiche, ponendo come supposta la a , la correlazione

$$R_a = \frac{r_{ab}^2 + r_{ac}^2 - 2 r_{ab} r_{ac} r_{bc}}{1 - r_{bc}^2}$$

tra b da un lato, e a e c dall'altro, ponendo per supposta la b , sussiste la correlazione:

$$R_b = \frac{r_{ab}^2 + r_{bc}^2 - 2 r_{ab} r_{bc} r_{ac}}{1 - r_{ac}^2}$$

e così via, di guisa che i coefficienti di correlazione di tre caratteristiche diventano differenti tra loro, a seconda della scelta della supposta caratteristica.

I valori limiti per ρ e R , sono ancora come sempre 0 e ± 1 ; gli indici di variabilità delle serie considerate come subordinate sono rispettivamente:

$$\sigma_a \sqrt{1 - R_a^2}; \quad \sigma_b \sqrt{1 - R_b^2}; \quad \sigma_c = \sqrt{1 - R_c^2}.$$

In fine *Yule* fa vedere la possibilità di estendere questa formula al caso di quattro e più caratteristiche.

Dal punto di vista delle applicazioni biologiche però, sono impiegati solo eccezionalmente finora i coefficienti di correlazione di più di due caratteristiche, ed il metodico uso di questi, attende ancora un ulteriore sviluppo.